SEMESTRAL

UNI





TRIGONOMETRÍA

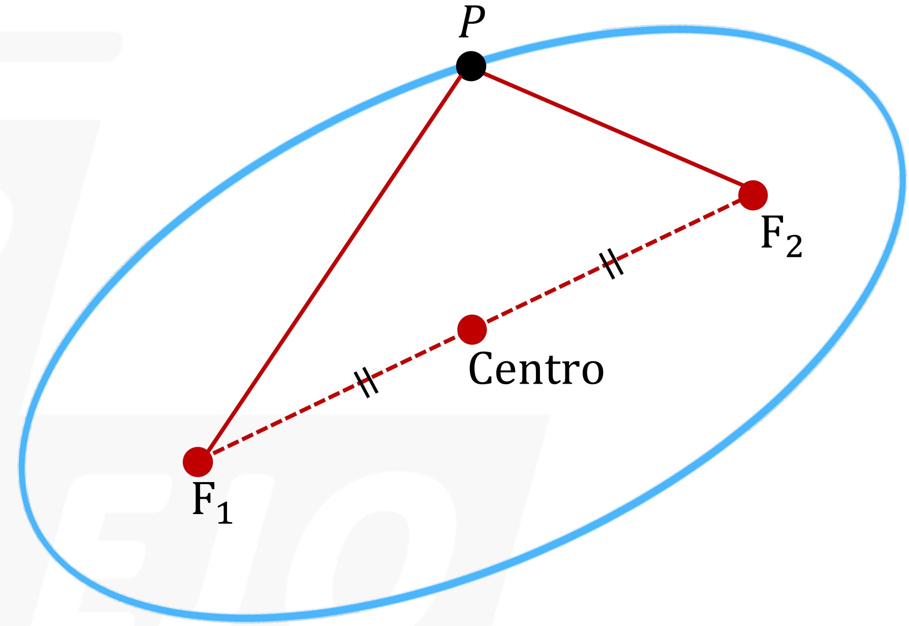
Tema: Cónicas II

Semana: 21

LA ELIPSE

DEFINICIÓN

Una elipse es el conjunto de todos los puntos P del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 llamados focos, es constante. El punto medio del segmento de recta que une a los puntos F_1 y F_2 se llama centro de la elipse.

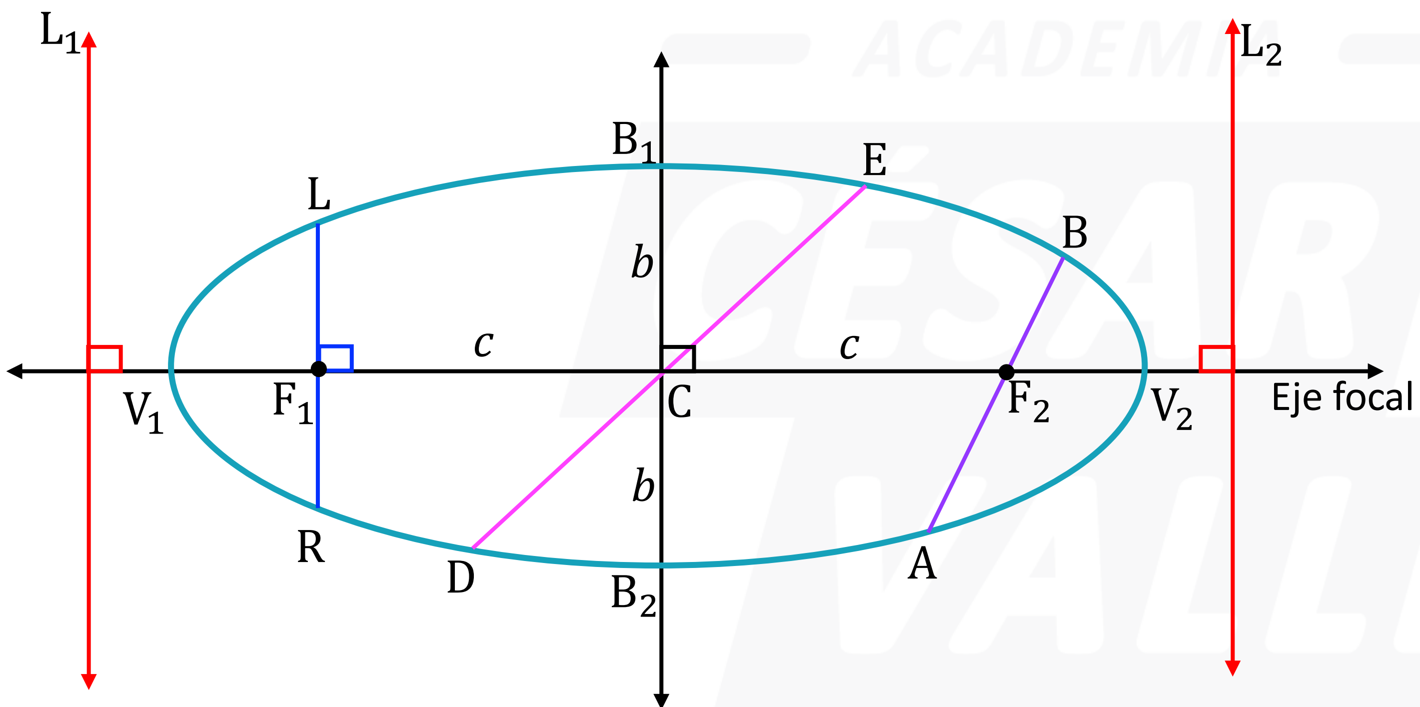


Se cumple que

$$d(P; F_1) + d(P; F_2) = 2a$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ELEMENTOS DE LA ELIPSE



– Vértices: V_1 y V_2
– Eje mayor: $\overline{V_1V_2}$; $d(V_1;V_2) = 2a$
– Eje menor: $\overline{B_1B_2}$; $d(B_1;B_2) = 2b$
– Focos: F_1 y F_2
– Distancia focal: $\overline{F_1F_2}$; $d(F_1;F_2) = 2c$
– Centro: C
– Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}$
– Rectas directrices: L_1 y L_2; $d(L_1;L_2) = \dfrac{2a}{e}$
– Cuerda focal: $\overline{AB}$
– Diámetro: $\overline{DE}$
– Radio focal: $\overline{F_2A}$; $\overline{F_2B}$
– Lado recto: $\overline{LR}$; $LR = \dfrac{2b^2}{a}$
– $a^2 = b^2 + c^2$

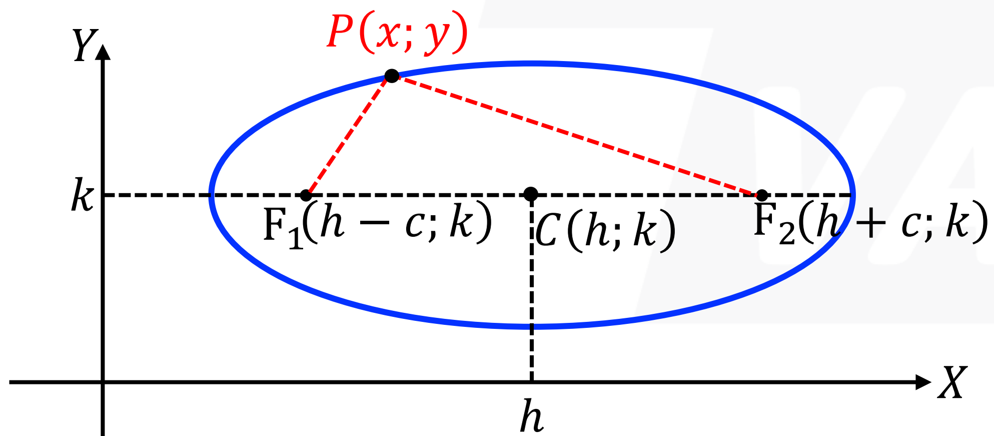
ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

EJERCICIO

Demuestre que la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$ de centro en el punto $C(h;k)$ y eje focal paralelo al eje X es

$$\mathcal{E}: \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

DEMOSTRACIÓN



En la elipse se cumple que: $d(P;F_1) + d(P;F_2) = 2a$

$$\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2} + \sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2} = 2a - \sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}$$

Elevamos al cuadrado y reducimos

$$c(x-h) - a^2 = -a\sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}$$

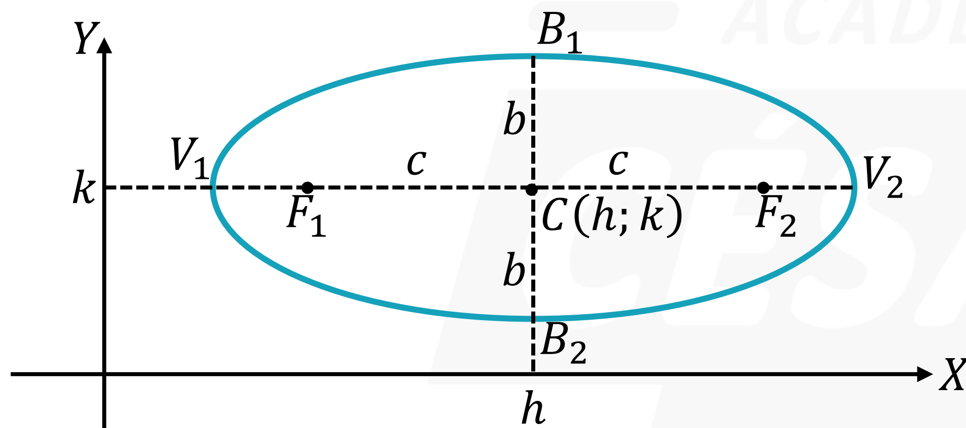
Elevamos al cuadrado y reducimos

$$\underbrace{(a^2-c^2)}_{b^2}(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2\underbrace{(a^2-c^2)}_{b^2}$$

$$\therefore\ \mathcal{E}: \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

ECUACIÓN DE LA ELIPSE DE CENTRO EN EL PUNTO C(*h*;*k*)

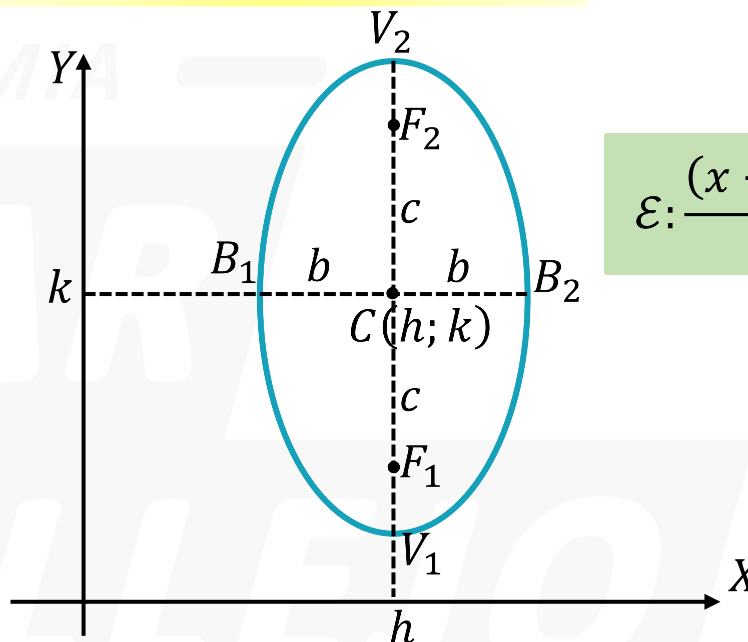
EJE FOCAL PARALELO AL EJE X



$$\mathcal{E}: \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$V_1(h-a;k)$ y $V_2(h+a;k)$ son los vértices.
$B_1(h;k+b)$ y $B_2(h;k-b)$ son los extremos del eje menor.
$F_1(h-c;k)$ y $F_2(h+c;k)$ son los focos.
$x = h \pm \frac{a}{e}$ es la ecuación de la directríz.

EJE FOCAL PARALELO AL EJE Y



$$\mathcal{E}: \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$V_1(h;k-a)$ y $V_2(h;k+a)$ son los vértices.
$B_1(h-b;k)$ y $B_2(h+b;k)$ son los extremos del eje menor.
$F_1(h;k-c)$ y $F_2(h;k+c)$ son los focos.
$y = k \pm \frac{a}{e}$ es la ecuación de la directríz.

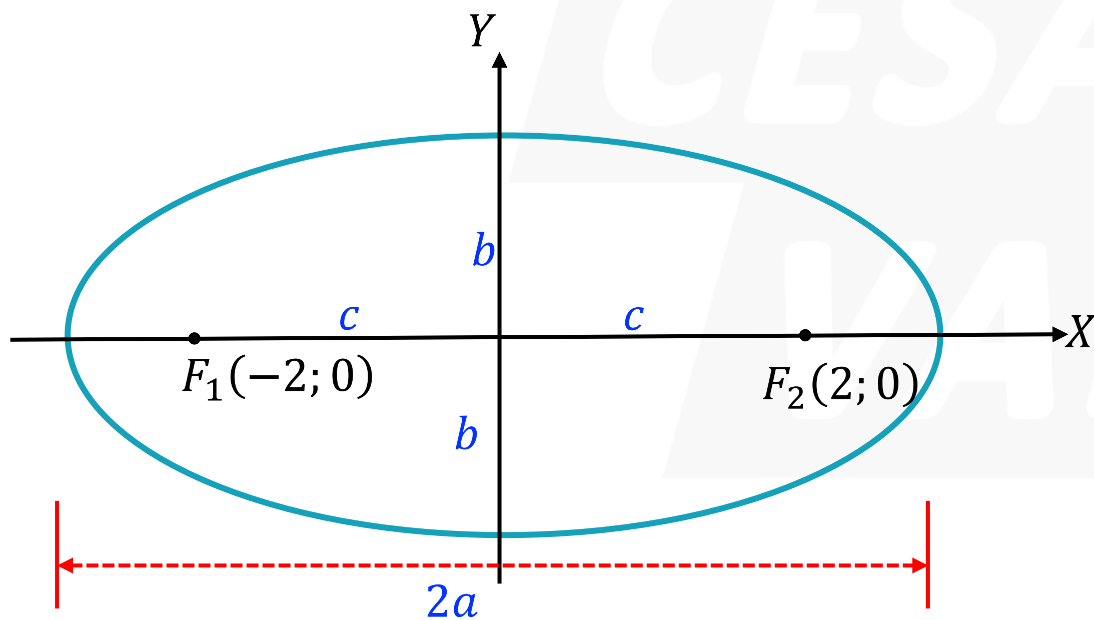
ECUACIÓN GENERAL $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ donde $A.C > 0$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

APLICACIÓN

Halle la ecuación de la elipse de focos $(-2;0)$ y $(2;0)$ y excentricidad igual a $\frac{2}{3}$.

RESOLUCIÓN



La ecuación de la elipse es de la forma:

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots \text{(I)}$$

Del gráfico $\quad c = 2$

Por dato $\quad e = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$

$$\frac{2}{a} = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad a = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad 9 = b^2 + 4 \quad \rightarrow \quad b^2 = 5$$

Reemplazando en (I), tenemos

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

APLICACIÓN

Dada la ecuación de la elipse
$\mathcal{E}: 3x^2 + 18x + 4y^2 - 16y + 31 = 0$; halle el lado recto y la gráfica de dicha elipse.

RESOLUCIÓN

Dato

$$\mathcal{E}: 3x^2 + 18x + 4y^2 - 16y + 31 = 0$$

Completamos cuadrados

$$3(x^2 + 6x) + 4(y^2 - 4y) + 31 = 0$$

$$3(x^2 + 6x + 9) + 4(y^2 - 4y + 4) + 31 = 0 + 27 + 16$$

$$3(x + 3)^2 + 4(y - 2)^2 = 12$$

Luego

$$\mathcal{E}: \frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1$$

Centro: $C = (-3; 2)$

$a^2 = 4 \rightarrow a = 2$

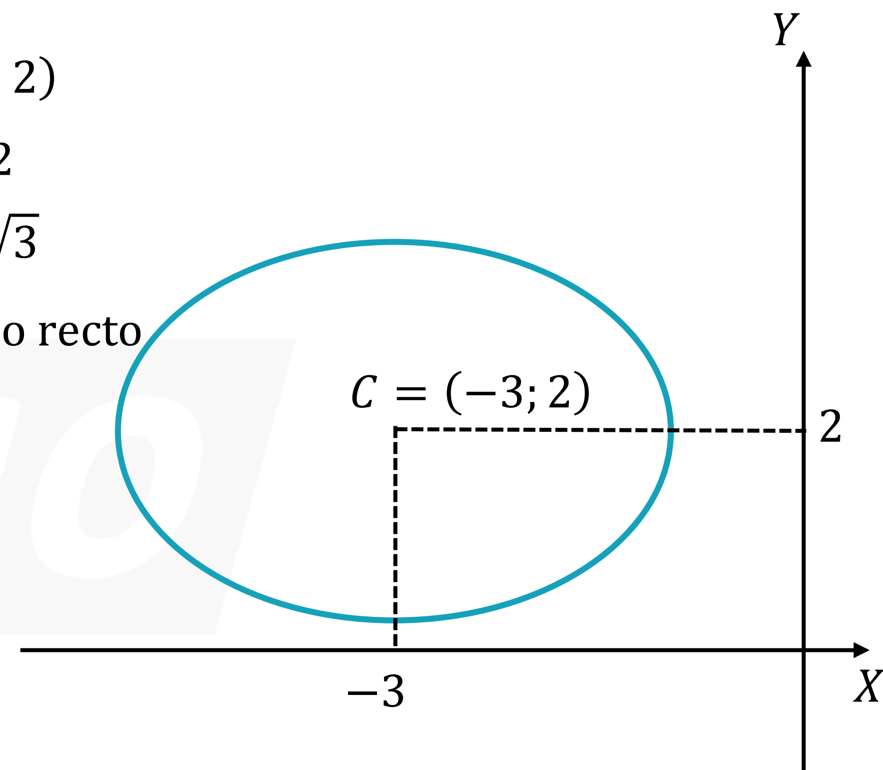
$b^2 = 3 \rightarrow b = \sqrt{3}$

Calculamos el lado recto

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

$$LR = \frac{2.3}{2}$$

$\rightarrow LR = 3$



ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

EJERCICIO UNI 2016 – II

Determine las coordenadas del foco de coordenadas positivas de la elipse

$4x^2 + y^2 - 8x + 4y = 8$

$A)\ (1; -2 - 2\sqrt{3})$

$B)\ (1; -2 + 2\sqrt{3})$

$C)\ (1; 2 + 2\sqrt{3})$

$D)\ (1; 4 - 2\sqrt{3})$

$E)\ (1; 4 + 2\sqrt{3})$

RESOLUCIÓN

Dato $4x^2 + y^2 - 8x + 4y = 8$

Completamos cuadrados

$4(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = 8$

$4(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 8 + 4 + 4$

$4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$

$$\rightarrow \quad \mathcal{E}: \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

Centro: $C = (1; -2) = (h; k)$

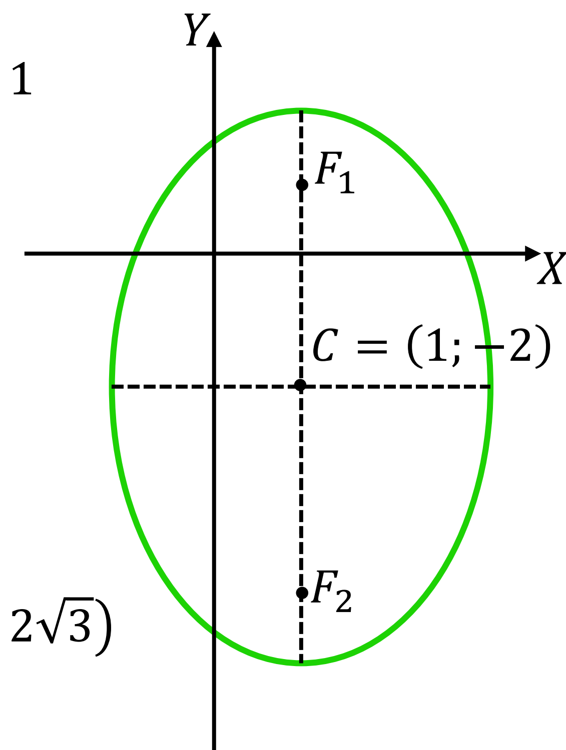
$a^2 = 16; \quad b^2 = 4$

$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad c = 2\sqrt{3}$

$F_1(h; k + c) \quad y \quad F_2(h; k - c)$

son los focos.

$F_1(1; -2 + 2\sqrt{3}) \quad y \quad F_2(1; -2 - 2\sqrt{3})$



$\therefore\ F_1\ (1; -2 + 2\sqrt{3})$

EJERCICIO

Los focos de una elipse están en las rectas

$L_1: 3x - 5y + 12 = 0$ y $L_2: 2x + 3y - 6 = 0$

Si el eje mayor es igual a 10 u y la recta $x = 6$ es el eje focal. Halle la ecuación de dicha elipse

RESOLUCIÓN

La ecuación de la elipse es de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \qquad \dots \text{(I)}$$

Dato: $2a = 10 \rightarrow a = 5$

$F_1 \in L_1 \cap L_3 \rightarrow F_1 = (6; 6)$

$F_2 \in L_2 \cap L_3 \rightarrow F_2 = (6; -2)$

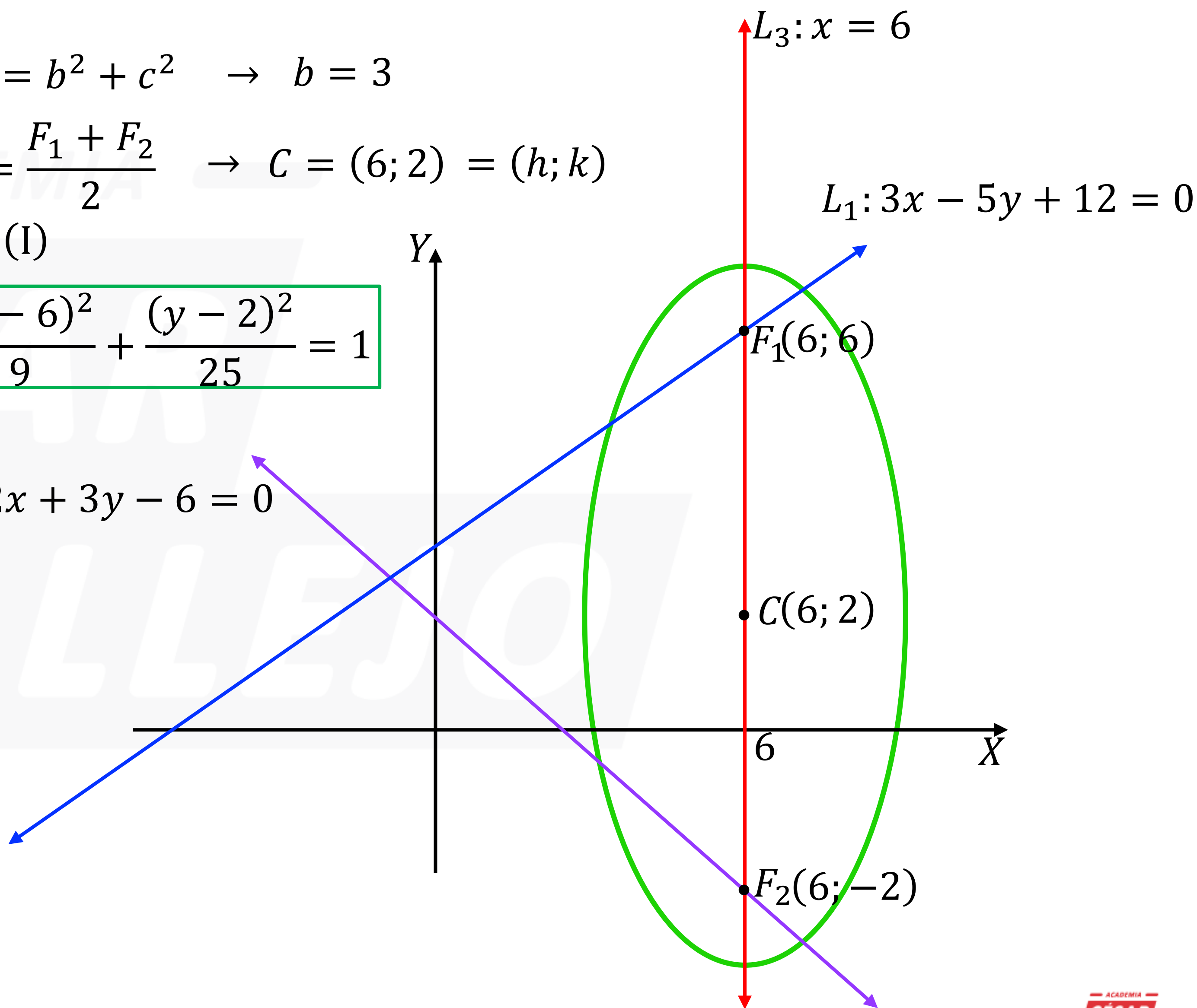
$d(F_1; F_2) = 2c \rightarrow 8 = 2c \rightarrow c = 4$

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = 3$

$C = \dfrac{F_1 + F_2}{2} \rightarrow C = (6; 2) = (h; k)$

En (I)

$$\frac{(x-6)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$$

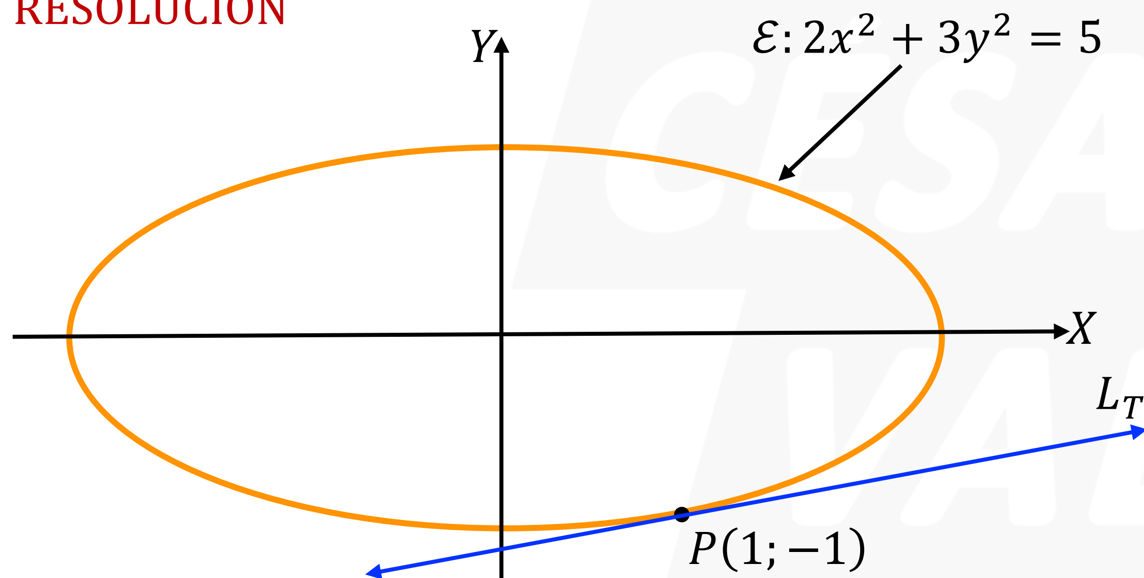


ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

EJERCICIO

Halle la ecuación de la recta tangente a la elipse
$\mathcal{E}: 2x^2+3y^2=5$ en el punto $P(1;-1)$.

RESOLUCIÓN



Sea la ecuación de la recta L_T

$L_T:\ y+1=m(x-1)$ ... (I)

Reemplazamos $y=mx-m-1$

en la ecuación de la elipse $2x^2+3y^2=5$

$$2x^2+3(mx-m-1)^2=5$$

Simplificando tenemos

$$(2+3m^2)x^2+(-6m^2-6m)x+3m^2+6m-2=0$$

Debido al punto de tangencia, la ecuación cuadrática tiene solución única.

$\rightarrow \Delta=0$

$$(-6m^2-6m)^2-4(2+3m^2)(3m^2+6m-2)=0$$

$$9m^2-12m+4=0 \quad \rightarrow \quad m=\frac{2}{3}$$

Reemplazando en (I)

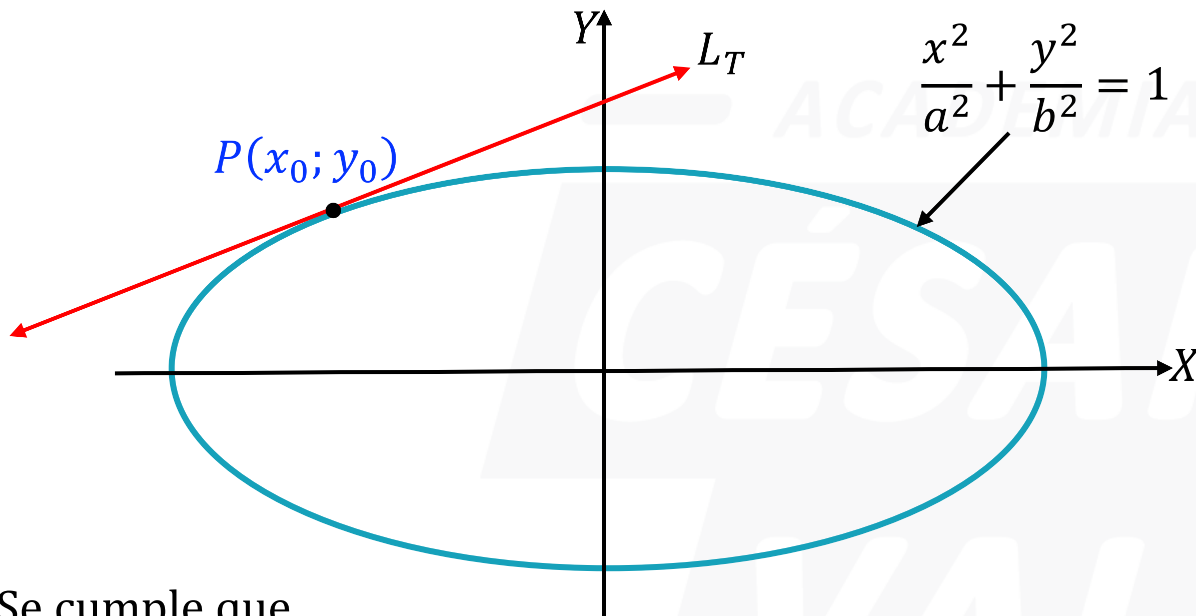
$$L_T:\ y+1=\frac{2}{3}(x-1)$$

$$\therefore\ L_T: 2x-3y-5=0$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

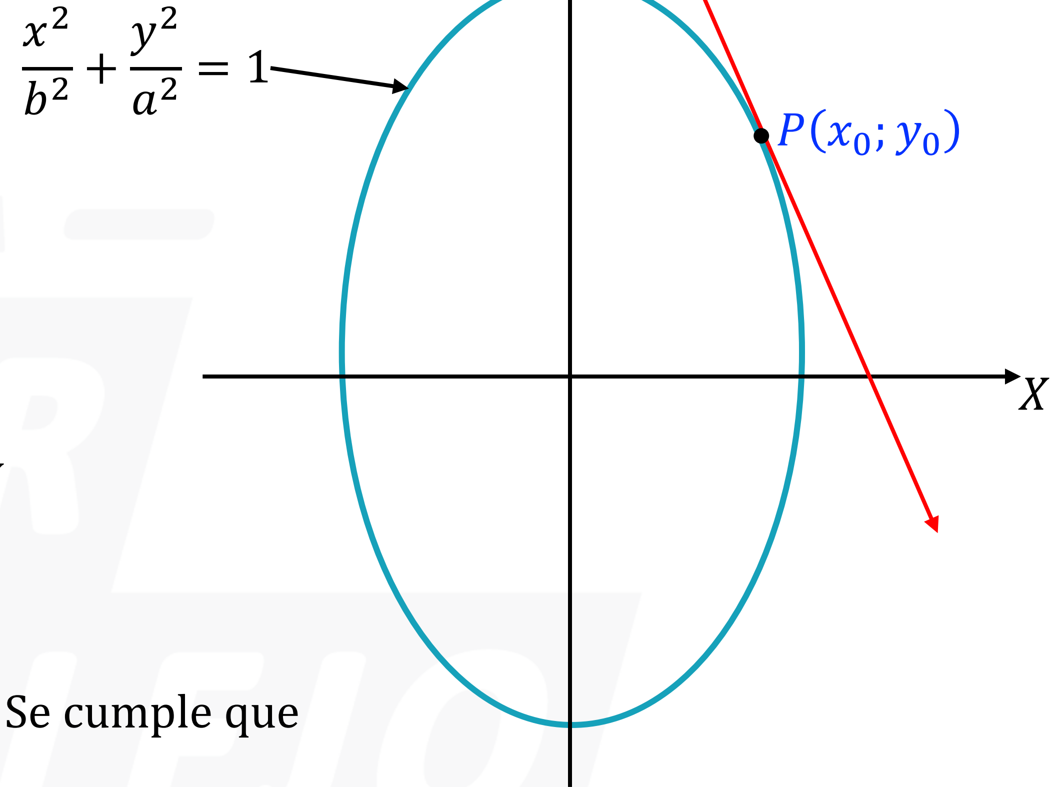
RECTA TANGENTE A UNA ELIPSE

Sea $P(x_0;y_0)$ un punto de tangencia de la elipse



Se cumple que

$$m=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$ es la pendiente de la recta L_T

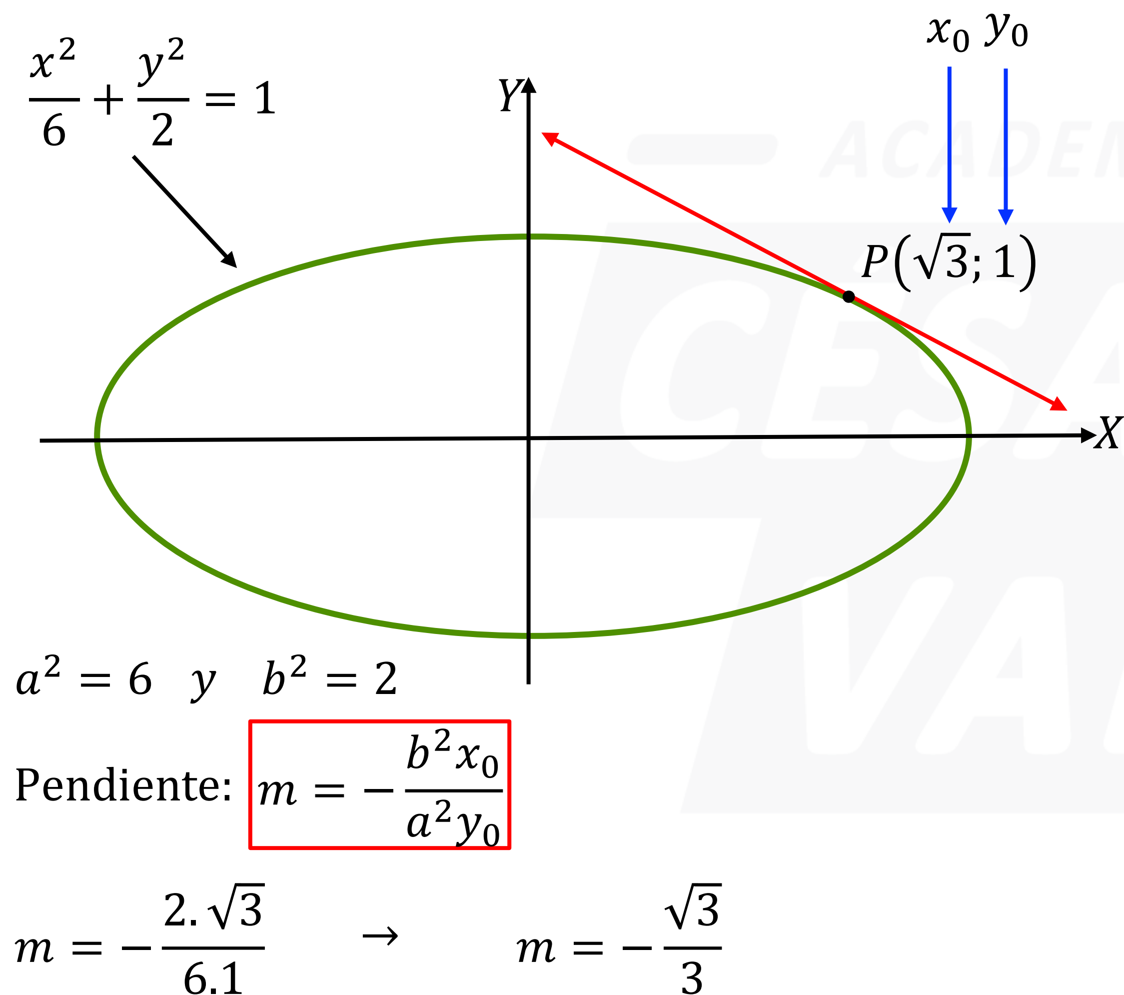


Se cumple que

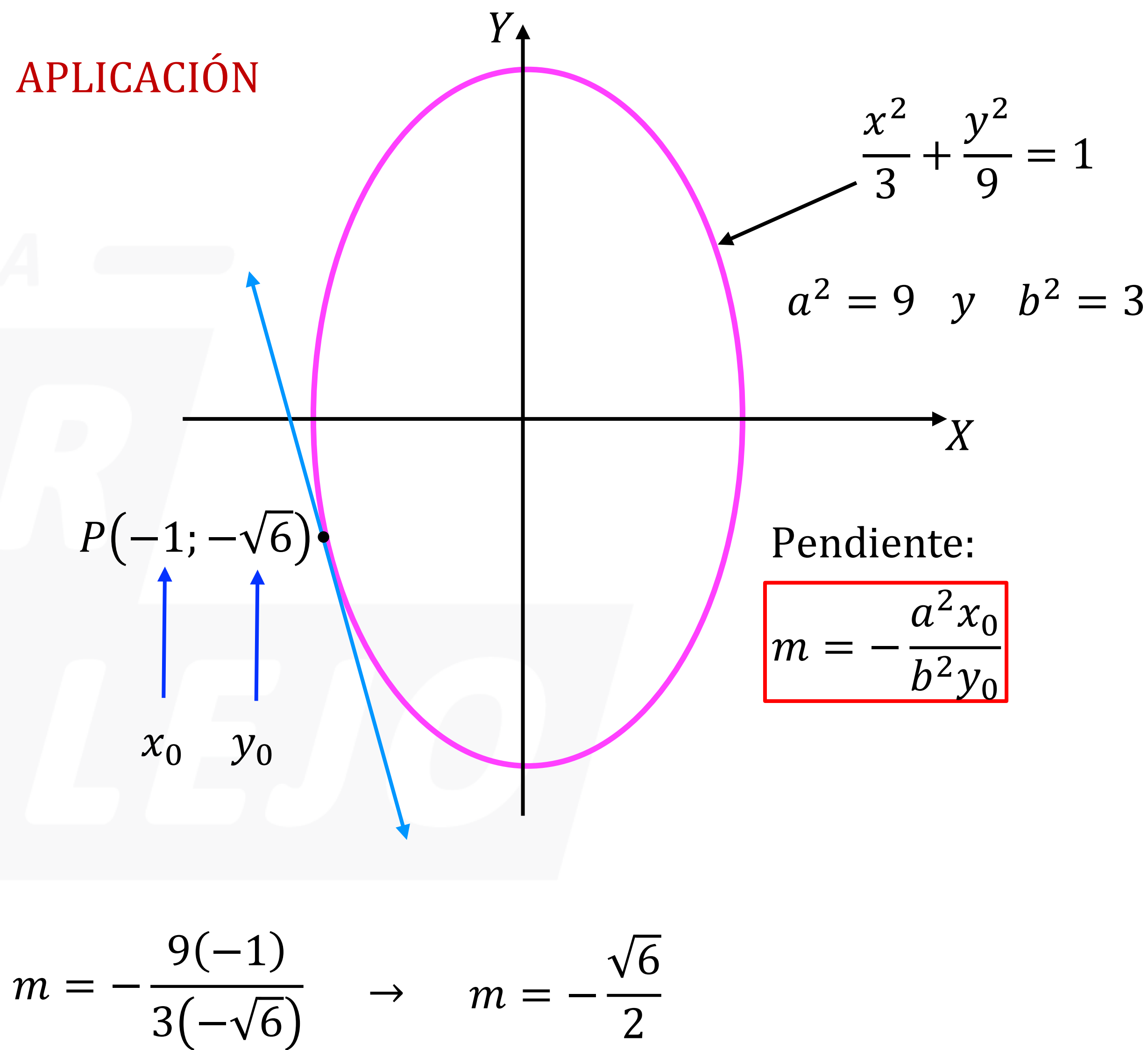
$$m=-\frac{a^2x_0}{b^2y_0}$$ es la pendiente de la recta L_T

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

APLICACIÓN



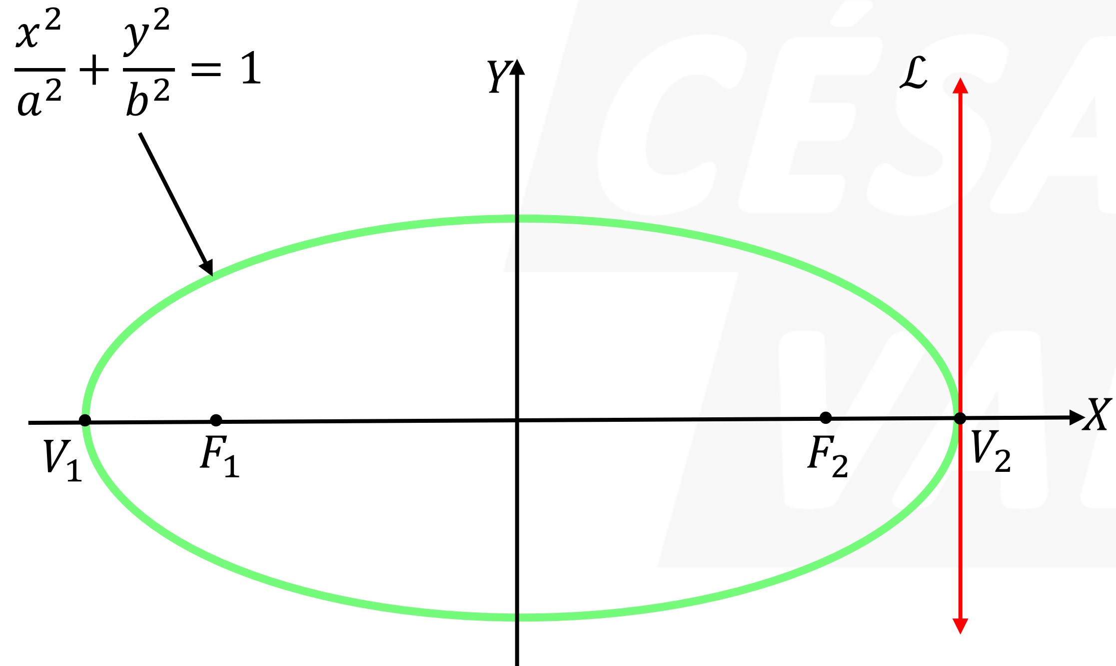
APLICACIÓN



ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

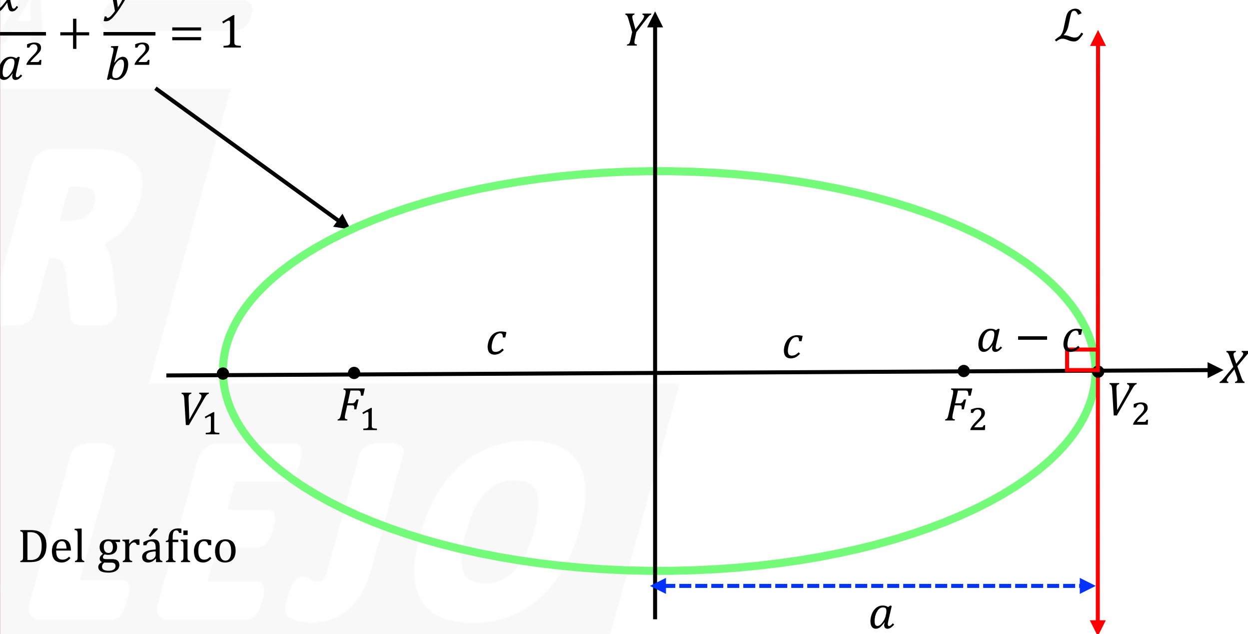
EJERCICIO

En la elipse mostrada, halle el producto de las distancias de los focos a la recta tangente $\mathcal{L}$ en el vértice V_2.



RESOLUCIÓN

Piden $d(F_1;\mathcal{L}).d(F_2;\mathcal{L})$



Del gráfico

$$d(F_1;\mathcal{L}).d(F_2;\mathcal{L})=(a+c)(a-c)=a^2-c^2$$

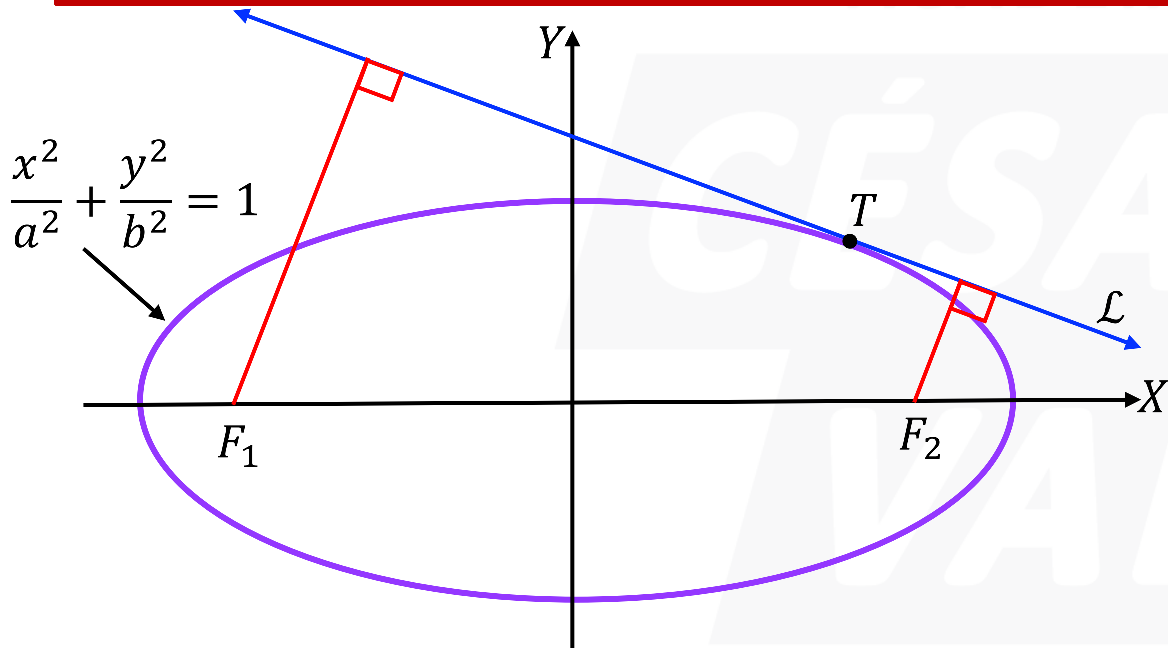
$$\therefore\ d(F_1;\mathcal{L}).d(F_2;\mathcal{L})=b^2$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

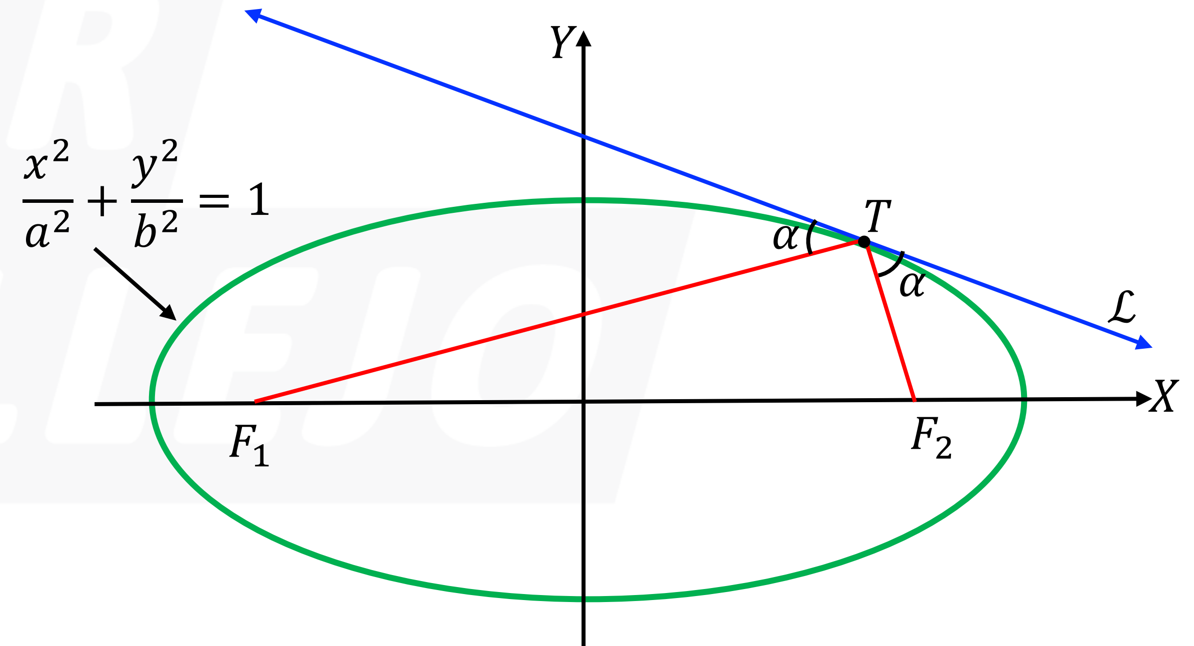
PROPIEDADES DE LA ELIPSE

En una elipse, el producto de las distancias de los focos a una recta tangente a la elipse es igual al cuadrado de la longitud del semieje menor.

PROPIEDAD DE LA REFLEXIÓN DE LA ELIPSE
La recta tangente a una elipse en un punto forma ángulos iguales con los radios focales de ese punto.



$$d(F_1;\mathcal{L}).d(F_2;\mathcal{L})=b^2$$



ACADEMIA CÉSAR VALLEJO



GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe